

Cartes combinatoires et géométries des surfaces

Résumé

Ce texte rassemble des notes d'un groupe de travail sur les cartes combinatoires et la géométrie qui a commencé à Bordeaux en Octobre 2017. L'objectif du groupe de travail est de (ré)concilier le comptage de cartes combinatoires (spécialité du LaBRI) et les espaces de modules de structures géométriques sur les surfaces (plutôt pratiqués à l'IMB).

1 Introduction

Le premier thème du groupe de travail est le comptage de cartes combinatoires, c'est-à-dire des graphes plongés dans les surfaces. Ces objets interviennent notamment en physique théorique comme des versions discrètes de métriques.

Le second thème concerne les structures géométriques sur les surfaces, comme par exemple une métrique ou une (G, X) structure, ainsi que leurs espaces de modules.

Pour rassembler ces deux mondes, on s'aventurera au-delà de la combinatoire et la géométrie avec les formes modulaires et quasi-modulaires, les matrices aléatoires, ...

2 Triangulations de courbure non-négative de la sphère

Cette section contient les notes des deux premières séances (19 octobre et 9 novembre). L'objectif est de présenter le résultat et la preuve d'un article récent de P. Engel et P. Smillie [?]. On définit tout d'abord les cartes combinatoires et le cas particulier qui nous intéresse : les triangulations à courbure non-négative (dont les "graphes fullerènes" sont des cas particuliers). La preuve est découpée en deux parties. Dans la Section ??, on construit une bijection entre les triangulations et les points entiers d'un réseau de $\mathbb{C}^{1,9}$ munie d'une forme hermitienne de signature $(1, 9)$ (cet espace est noté $\mathbb{C}^{1,9}$ dans l'article d'Engel-Smillie). Dans cette correspondance, le nombre de triangles d'une triangulation est proportionnel à la norme du vecteur pour la forme quadratique. Cette bijection est due à Thurston [?]. Ensuite, dans la Section ??, nous expliquons le coeur de l'article d'Engel-Smillie. Plus précisément, pourquoi les fonctions génératrices des points entiers ont des propriétés de modularité. Et comment utiliser ces propriétés pour obtenir une formule explicite.

2.1 Triangulations et cartes combinatoires

On définit brièvement ce qu'on entend par une carte combinatoire et ses automorphismes dont il va être question dans tout ce texte. On pourra consulter le premier chapitre de l'ouvrage de S. Lando et A. Zvonkine [?] pour plus de détails.

Les graphes que l'on considère n'ont pas d'orientation de leurs arêtes. On autorise les multi-arêtes ainsi que les boucles.

Point de vue topologique.

Définition 1 (carte combinatoire (géométrique)). *Soit S une surface topologique compacte orientée connexe. Une carte combinatoire est la donnée d'un graphe Γ (non orienté possiblement avec arêtes multiples et boucles) et d'un plongement $\phi : \Gamma \rightarrow S$ tel que le complémentaire de $\phi(\Gamma)$ dans S est homéomorphe à une réunion disjointe de disques.*

Chaque composante du complémentaire de $\phi(\Gamma)$ est appelée une *face*.

Deux cartes combinatoires (S, Γ, ϕ) et (S', Γ', ϕ') sont *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme préservant l'orientation $F : S \rightarrow S'$ et un homéomorphisme $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tels que $\phi' \circ F = f \circ \phi$. Lorsqu'on parle de carte combinatoire, on parle souvent de classe d'équivalence de triplets (S, Γ, ϕ) .

Point de vue combinatoire. Le point de vue combinatoire prend le parti constructif du collage.

Définition 2 (carte combinatoire (permutations)). *Une carte combinatoire est la donnée de trois permutations (σ, α, ϕ) d'un groupe symétrique S_{2m} tels que*

1. α est une involution sans point fixe,
2. le produit $\sigma\alpha\phi$ est l'identité,
3. le groupe engendré par σ , α et ϕ agit transitivement sur $\{1, 2, \dots, 2m\}$.

Les cycles des décompositions en cycles de σ , α et ϕ sont appelés respectivement les *sommets*, *arêtes* et *faces* de la carte.

Pour construire une surface topologique à partir des données (σ, α, ϕ) on utilise la procédure suivante. Soit $\phi = c_1 c_2 \dots c_n$ la décomposition en cycles de ϕ . Pour chaque cycle c_i , notons k_i sa longueur. On considère alors une réunion disjointe de n polygones à respectivement k_1, k_2, \dots, k_n côtés. Les côtés de

chaque polygones sont numérotés par les cycles en suivant le sens trigonométrique. Pour obtenir une surface on recolle les paires de côtés selon la permutation α . Autrement dit, le côté numéroté i est collé avec $\alpha(i)$.

On remarquera que suivre les cycles de $\sigma = \phi^{-1}\alpha^{-1}$ revient à considérer l'ensemble des demi-arêtes adjacentes à un sommet donné.

Deux cartes (σ, α, ϕ) et $(\sigma', \alpha', \phi')$ de S_{2m} sont équivalentes s'il existe une permutation τ de S_n telle que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$, $\tau\alpha\tau^{-1} = \alpha'$ et $\tau\phi\tau^{-1} = \phi'$.

Un *automorphisme* d'une carte (σ, α, ϕ) est une permutation τ telle que τ commute avec σ , α et ϕ . Les automorphismes de la carte (σ, α, ϕ) forment un sous-groupe de S_n qui est l'intersection des centralisateurs de σ , α et ϕ .

Interprétation en terme de revêtements. Un k -uplets $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ de permutations de S_d dont le produit $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k$ est l'identité s'appelle plus généralement une *constellation*. Une constellation encode la monodromie d'un revêtement de la sphère S^2 de degré d ramifié au-dessus de k points (le revêtement est connexe si et seulement si le groupe engendré par les σ_i est transitif).

Une carte combinatoire est donc aussi un revêtement de la sphère privée de trois points! On peut en fait retrouver le dessin du graphe avec ce revêtement. Plus précisément, soit $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ un revêtement ramifié au-dessus de $p_\sigma = 0$, $p_\alpha = 1$ et $p_\phi = \infty$ (on identifie la sphère S^2 avec la sphère de Riemann $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pour avoir des coordonnées sympathiques). Sur \mathbb{CP}^1 on considère une "carte combinatoire décorée" faites des 3 sommets 0, 1 et ∞ et de l'arête $[0, 1]$. L'image réciproque de $0 = p_\sigma$ par f est l'ensemble des sommets de la carte et l'image réciproque du segment $[0, 1]$ forme les arêtes. Dans cette correspondance, chaque préimage de $[0, 1]$ est une demi-arête : le fait que α soit une involution sans point fixe revient à dire que dans le revêtement, on a deux demi-arêtes qui arrivent en chaque préimage de p_α (autrement dit c'est un point "régulier" du graphe).

Remarque 1. *Lorsqu'on oublie la condition sur la classe de conjugaison de α on peut encore construire des cartes dont les sommets sont naturellement bicoloriés (une couleur pour les préimages de 0 et une couleur pour les préimages de 1). Dans cette version, on a une symétrie entre les trois permutations σ , α et ϕ .*

2.2 Triangulations presque plates et énoncé du théorème d'Engel-Smillie

Il existe deux saveurs pour le comptages des cartes. Compter toutes les cartes de genre g avec un nombre de faces fixé n (qui sera l'objet de la deuxième partie du groupe de travail). Et le comptage des cartes presque plates qui nous intéresse ici.

Il existe trois pavages réguliers du plan en polygones réguliers. En triangles équilatéraux, en carrés et en hexagones (voir figure 1). Notez qu'en chaque sommet on a respectivement 6 triangles, 4 carrés ou 3 hexagones (le pavage en triangle est dual au pavage en hexagone tandis que le pavage en carré est autodual). Informellement, les cartes presque plates sont les cartes qui ressemblent "beaucoup" à un de ces pavages là. Étant donné $k \in \{3, 4, 6\}$ on notera k' le nombre de polygones adjacents à chaque sommet dans la k -angulation régulière du plan (autrement dit $3' = 6$, $4' = 4$ et $6' = 3$). Notez que les angles intérieurs du k -gone régulier sont tous $\frac{2\pi}{k'}$.

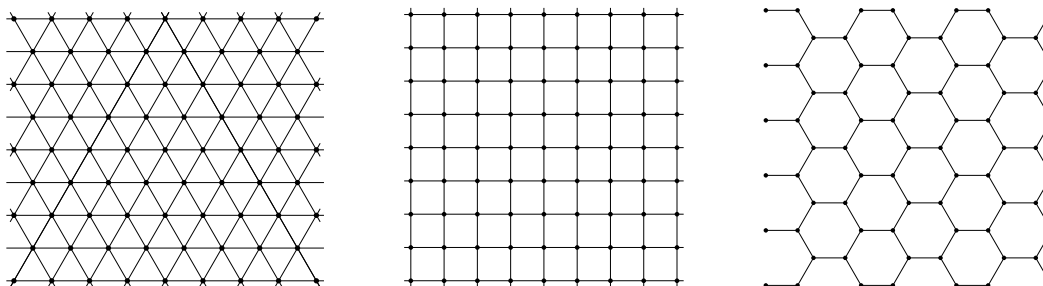


FIGURE 1 – Les trois pavages réguliers du plan en polygones.

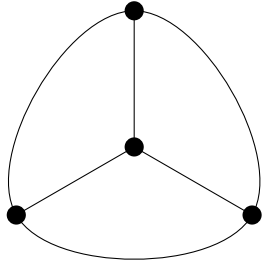
Soit k un entier ≥ 3 . On appelle k -angulation une carte combinatoire pour laquelle toutes les faces sont des k -gones (autrement dit, la décomposition en cycles de ϕ ne contient que des k -cycles).

Définition 3. *Soit un entier $k \in \{3, 4, 6\}$ et $C = (\sigma, \alpha, \phi)$ une k -angulation. La courbure discrète d'un sommet v de C est $\kappa_v = 1 - \mu_v/k'$ où μ_v est le nombre de demi-arêtes (ou de secteurs angulaires) adjacentes au sommet v et k' le dual de k .*

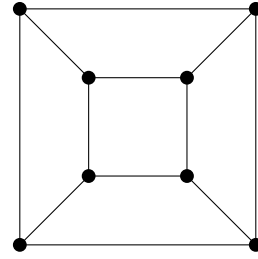
Notez que $\kappa_v = 0$ en tout sommet des pavages réguliers du plan. La proposition suivante relie la courbure au genre de la surface.

Proposition 1 (formule de Gauss-Bonnet). *Soit $k \in \{3, 4, 6\}$ et $C = (\sigma, \alpha, \phi)$ une k -angulation. La formule suivante relie le genre g de C à la courbure κ_v de ses sommets*

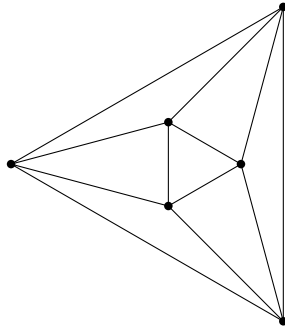
$$\sum_{v \text{ sommets de } C} \kappa_v = 2 - 2g.$$



Le tétraèdre est une 3-angulation à 4 faces de signature $(1/2)^4$.



Le cube est une 4-angulation à 6 faces de signature $(1/4)^8$.



L'octaèdre est une 4-angulation à 8 face de signature $(1/3)^6$.

ICOASEDRE

L'icosaèdre est une 3-angulation à 20 faces de signature $(1/6)^{12}$.

FIGURE 2 – Cartes combinatoires de 4 polyèdres réguliers.

Exercice : Donner trois preuves de la formule de Gauss-Bonnet. Une première en utilisant la formule combinatoire $s - a + f = 2 - 2g$ pour la caractéristique d'Euler d'une surface où s , a et f sont respectivement les nombres de sommets, arêtes et faces. La seconde en utilisant la formule de Gauss-Bonnet pour les métriques riemanniennes en considérant que chaque k -gone est régulier (on obtient une surface plate à singularité conique). Une dernière en utilisant le théorème d'Hurwitz sur les revêtements.

Définition 4. Étant donné une k -angulation C , le multi-ensemble des courbures aux sommets non nulles est appelé la signature de C .

Une carte est dite à courbure non-négative si toutes les courbures vérifient $\kappa_v \geq 0$. Quatre des cinq polyèdres réguliers sont des k -angulations de courbure non-négative (voir figure 2).

Exercice : Les seules surfaces avec des cartes de courbure non-négatives sont la sphère ($g = 0$) et le tore ($g = 1$).

Problème général : On choisit une signature et on cherche à compter les k -angulations à n faces et signatures fixée. Plus précisément, de comprendre l'asymptotique de ce nombre lorsque n tend vers l'infini. Le théorème d'Engel-Smillie donne une réponse précise au comptage des k -angulations de courbure non-négative sur la sphère.

Le théorème d'Engel-Smillie fait intervenir un poids qui dépend de la signature (on interprétera plus loin ce poids en terme de cardinal de stabilisateur).

Définition 5. Soit T une k -angulation de la sphère à courbure non-négative. On définit le poids $w(T)$ de la triangulation T le nombre rationnel

$$\text{wt}(T) = \frac{1}{|\text{Aut}(T)|} \prod \frac{\left(1 - \frac{\mu_i}{k}\right)^{\mu_i - 1}}{\mu_i!}.$$

Notez l'apparition de la courbure au numérateur de $\text{wt}(T)$. Plus loin, on verra que $\text{wt}(T)$ correspond au cardinal d'un certain stabilisateur.

Théorème 1 (Engel-Smillie). La somme pondérée des triangulations à courbure non-négative de la sphère à $2n$ triangles vérifie

$$\sum_{|T|=2n} \text{wt}(T) = \frac{809}{2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^2} \sigma_9(n)$$

où $\sigma_9(n)$ est la somme des puissances 9e des diviseurs de n

$$\sigma_9(n) = \sum_{d|n} d^9.$$

Remarquons tout de suite que la fonction génératrice de la suite $\sigma_9(n)$ (sauf le coefficient de q^0) est une forme modulaire de poids 10. Plus précisément, il s'agit de la série d'Eisenstein

$$E_{10}(\tau) = 1 - 264 \sum_{n>0} \sigma_9(n)q^n$$

où on note $q = \exp(2i\pi\tau)$.

2.3 Des triangulations aux réseaux (Thurston)

Dans cette section, nous expliquons pourquoi les triangulations peuvent être vues comme des points d'un réseau. C'est le coeur de la construction de Thurston dans son article "*Shapes of polyhedra*" [?]

On note $\text{Eis} = \mathbb{Z}[\rho]$ l'anneau des entiers d'Eisenstein où $\rho = \exp(2i\pi/3)$ est la racine 3e de l'unité. Noter que $\text{Eis} \subset \mathbb{C}$ correspond aux sommets d'un pavage régulier en triangle équilatéraux de côté de longueur 1 et d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2.3.1 Mise en bouche : le cas des tétraèdres

On considère ici les triangulations qui correspondent aux tétraèdres, c'est-à-dire la signature $(1/2)^4 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

A toute base orientée (u, v) de \mathbb{C} vue comme \mathbb{R} -espace vectoriel on va associer un tétraèdre, voir aussi Figure ???. Lorsque u, v seront dans Eis on obtiendra une triangulation de signature $(1/2)^4$. Soit donc (u, v) une base orientée de \mathbb{C} . On considère le triangle t de sommets $0, 2u, 2v$ dans \mathbb{C} . Les milieux des trois côtés de ce triangle sont u, v et $u+v$. En les joignant on divise le t en 4 triangles isométriques. En recollant les segments $[0, u]$ à $[u, 2u]$, $[2u, u+v]$ à $[u+v, 2v]$ et $[0, v]$ à $[v, 2v]$ on obtient un tétraèdre. Cette construction peut également être vue comme le quotient du plan euclidien \mathbb{C} quotienté par le groupe de pavages $G_{u,v}$ composé des translations $\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ et de la multiplication par -1 (qui est une rotation d'angle π). Lorsque u, v sont des entiers d'Eisenstein, alors le groupe $G_{u,v}$ préserve le pavage régulier en triangles équilatéraux. Le quotient est donc muni d'une triangulation qui, par construction, est de signature $(1/2)^4$.

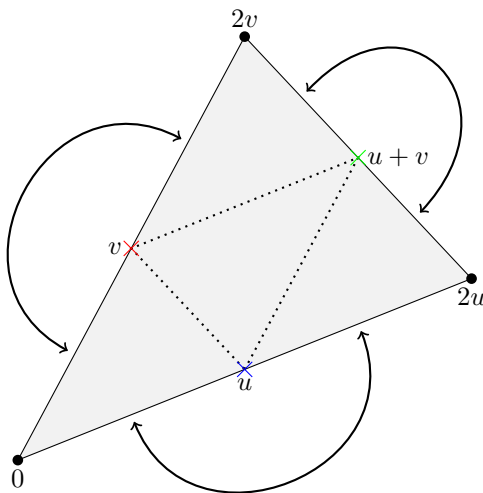


FIGURE 3 – Construction d'un tétraèdre d'angles aux sommets (π, π, π, π) à partir d'une base orientée (u, v) de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Théorème 2. *A toute triangulation T à $2n$ faces de signature $(1/2)^4$ il existe une \mathbb{R} -base orientée (u, v) de \mathbb{C} avec u, v dans Eis telle que la triangulation du tétraèdre associé est isomorphe à T . De plus $\det(u, v) = \frac{\sqrt{3}}{4}n$ et deux triangulations T_1 et T_2 obtenues à partir des bases (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont isomorphes si et seulement si $\mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}v_1 = \mathbb{Z}u_2 \oplus \mathbb{Z}v_2$; autrement dit si et seulement si on peut faire un changement de base dans $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ pour passer de (u_1, v_1) à (u_2, v_2) .*

Démonstration. Considérons une triangulation T de signature $(1/2)^4$. En déclarant que chaque triangle de T est un triangle équilatéral de côté 1 on obtient une *métrique plate* avec 4 singularités coniques d'angles π sur la sphère munie d'une triangulation en triangles équilatéraux. Plus précisément, on peut mesurer les longueurs des courbes en ajoutant la contribution de chaque morceau inclus dans chaque triangle mesuré avec la métrique euclidienne. Cette structure métrique s'identifie localement en tout point avec le plan euclidien sauf aux 4 sommets singuliers. Au milieu d'un triangle c'est évident et sur les arêtes et sommets réguliers il

suffit de remarquer qu'on est dans un morceau du pavage régulier en triangles équilatéraux. On va noter X cette sphère métrique pour la différentier de la sphère topologique.

On construit maintenant une isométrie locale $D : \mathbb{C} \rightarrow X$ telle que l'image du pavage régulier de \mathbb{C} par les triangles équilatéraux est exactement notre triangulation initiale. Pour cela, on effectue un revêtement ramifié de notre triangulation. On effectue une première fois un revêtement double ramifié au-dessus des 4 points singuliers. On obtient une triangulation sur une surface de genre 1 dont tous les sommets sont de courbure $\kappa_v = 0$. On regarde ensuite le revêtement universel de ce tore (qui est le plan). L'image réciproque de la triangulation est nécessairement le pavage régulier.

Le groupe du revêtement ainsi construit est isomorphe à un certain $G_{u,v}$ pour des vecteurs u, v qui sont des entiers d'Eisenstein. La surface X est alors isomorphe au quotient $\mathbb{C}/G_{u,v}$. Ce qui termine la démonstration de la première partie.

Considérons maintenant deux quotients $\mathbb{C}/G_{u,v}$ et $\mathbb{C}/G_{u',v'}$ qui sont isométriques. C'est le cas si et seulement si $G_{u,v} = G_{u',v'}$. Cette dernière égalité a lieu exactement lorsque $\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}u' \oplus \mathbb{Z}v'$, autrement dit (u, v) et (u', v') sont des bases d'un même réseau. \square

Regardons maintenant l'ensemble des vecteurs de $L = \text{Eis}^2 \subset \mathbb{C}^2$ qui paramétrise les triangulations de tétraèdres. L'aire de la surface du tétraèdre est une forme quadratique hermitienne sur \mathbb{C}^2

$$Q((u_1, u_2)) = 2 \det(u_1, u_2) = i(u_1 \bar{u}_2 - \bar{u}_1 u_2).$$

Théorème 3. 1. Q est la forme quadratique d'une unique forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signature $(1, 1)$ sur \mathbb{C}^2 .

2. Pour $u \in L$ tel que $Q(u) > 0$, la triangulation du tétraèdre associée à u vérifie $Q(u) = \sqrt{3}n$ où $2n$ est le nombre de triangles de la triangulation.
3. Les changements de bases $(u, v) \mapsto (u', v')$ données par des transformations de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont des isométries pour cette forme hermitienne.

Démonstration. On cherche une structure hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{C}^2 telle que

$$Q(u) = \langle u, u \rangle.$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité il suffit de remarquer que

$$Q(u + iv) = Q(u) + Q(v) + 2 \text{Im}(\langle u, v \rangle) \quad (1)$$

$$\text{Re}(\langle iu, v \rangle) = \text{Im}(\langle u, v \rangle). \quad (2)$$

En effet, la première équation détermine la partie imaginaire de la forme hermitienne et la seconde définit sa partie réelle. On trouve alors simplement

$$\langle u, v \rangle = i(u_1 \bar{v}_2 - u_2 \bar{v}_1).$$

Cette forme hermitienne se diagonalise dans la base $u = (1, \rho)$ et $v = (1, \bar{\rho})$ de L . On peut vérifier que

$$\langle u, u \rangle = \sqrt{3} \quad \langle v, v \rangle = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = 0.$$

\square

2.3.2 Le cas général

Dans le cas général il est plus délicat de faire la construction et nous nous contentons de l'énoncé. Pour les détails nous renvoyons à l'article de Thurston [?] aux notes de R. Shwartz [?] et l'appendice A de l'article de Engel-Smillie [?].

Théorème 4. Il existe un réseau Λ de $\mathbb{C}^{1,9}$ et un groupe Γ d'isométrie de $\mathbb{C}^{1,9}$ préservant le réseau Λ tels que les triangulations à courbure non-négative de la sphère s'identifie aux orbites de vecteurs de norme positive de Λ . De plus pour une triangulation T correspond à l'orbite d'un vecteur v on a

$$|\text{Stab}_\Gamma(v)| = \frac{1}{|\text{Aut}(T)|} \prod \frac{(1 - \frac{\mu_i}{6})^{\mu_i - 1}}{\mu_i!}$$

où les μ_i sont les nombres d'arêtes (ou faces) adjacentes à chaque sommet.

2.4 Comptage de points entiers dans les réseaux (Siegel, etc)

Grâce aux théorèmes ?? et ?? le comptage de triangulations se ramènent au comptage d'orbites de points entiers dans un réseau sous l'action d'un groupe d'isométrie. Plus précisément, on a

$$\sum_{T \text{ triangulation}} \text{wt}(T) q^{|T|} = \sum_{\Gamma v \in \Gamma \backslash \Lambda, Q(v) > 0} \frac{1}{|\text{Stab}(v)|} q^{\frac{1}{2}Q(v)}.$$

où $|T|$ désigne le nombre de faces de T .

2.4.1 Formes modulaires

Une forme modulaire holomorphe de poids $k \in 2\mathbb{Z}$ est une fonction $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie

1. (régularité) f est holomorphe
2. (modularité) pour tout $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ on a

$$f(\gamma \cdot \tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

3. (comportement dans la pointe) f est holomorphe dans la pointe. C'est-à-dire que dans sa décomposition en série de Fourier il n'y a que des coefficients positifs

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

où $q = \exp(2i\pi\tau)$.

La condition de modularité peut se voir comme une condition d'invariance par $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme différentielle $f(z)dz^k$.

Nous allons voir ici que les fonctions génératrices de comptage des points entiers dans un réseau vérifient des propriétés de modularité. Pour une introduction aux formes modulaires on peut consulter la seconde partie du livre de Serre [?] ou le livre de Diamond-Shurman [?].

Les formes modulaires forment des espaces de dimension fini que l'on sait identifier. Notons que le produit d'une forme modulaire de poids k_1 avec une forme modulaire de poids k_2 est une forme modulaire de poids k_1+k_2 . Autrement dit, les formes modulaires forment une algèbre graduée.

Théorème 5. Les formes modulaires holomorphes de poids $k \in 2\mathbb{Z}$ forme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension fini. L'algèbre des formes modulaires s'identifie à l'algèbre des polynômes en E_4 et E_6 où E_k est la série d'Eisenstein

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{k}{B_k} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n)q^n$$

où $q = \exp(2i\pi\tau)$, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et B_k est le k -e nombre de Bernoulli.

Par exemple en poids 10 il y a une unique forme modulaire E_4E_6 . Comme E_{10} est une autre forme modulaire de poids 10 on en déduit que $E_{10} = E_4E_6$. En identifiant les coefficients on obtient la formule suivante valide pour tout $n \geq 1$

$$5040 \sum_{a+b=n} \sigma_3(a)\sigma_5(b) = 10\sigma_3(n) - 21\sigma_5(n) + 11\sigma_9(n) \tag{3}$$

Exercice : Essayer de démontrer la formule (??) par des méthodes arithmétiques élémentaires.

2.4.2 Comptage des tétraèdres

Nous avons vu que compter les tétraèdres revient à compter des sous-réseaux. C'est la fonction

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$$

La fonction génératrice est la fonction d'Eisenstein

$$E_2(\tau) = 1 - \sum_n \sigma_1(n)q^n.$$

Cette fonction n'est pas modulaire mais quasi-modulaire!

... à suivre

2.4.3 Fonction thêtas des réseaux définis positifs

... à suivre

2.4.4 Fontions thêtas des réseaux indéfinis

... à suivre

Références

- [BG] C. Bavard et E. Ghys *Polygones du plan et polyedres hyperboliques* Geometriae Dedicata
- [DS] F. Diamond et J. Schurman *A First Course in Modular Forms* Springer
- [ES] P. Engel et P. Smillie *The number of non-negative curvature triangulations of S^2* arXiv :1702.02614
- [Fi] F. Fillastre *From spaces of polygons to spaces of polyhedra following Bavard, Ghys and Thurston*, Enseign. Math. (2) **57** (2011), no. 3-4, 23-56.
- [LZ] S. Lando et A. Zvonkine *Graphs on surfaces* Springer
- [Sc] R. Schwartz *Notes on shapes of polyhedra*
- [Se] J.-P. Serre *Cours d'arithmétique* PUF
- [Th] W. Thurston *Shapes of polyhedra* Geom. and Top. **1** (1998) 511–549.