

La Formule de Frobenius

1 Représentation irréductible

[Ser71] [Zag]

Définition 1.1. Soit G un groupe fini, soit V est un espace vectoriel complexe de dimension fini. On dit (V, π) est une représentation de G si π est un morphisme de G dans $GL(V)$, c'est-à-dire $\pi(g)$ est une application linéaire inversible et $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ avec $\pi(e) = Id$.

Après, on abrégée $\pi(g)v$ par gv . On dit deux représentation V, V' sont isomorphe si il existe un G -équivalent isomorphisme φ de V vers V' .

$$\varphi(gv) = g\varphi v.$$

Définition 1.2. On dit V est irréductible s'il n'y a pas sous espace vectoriels non triviaux G -invariants.

Conséquence, la représentation de dimension 1 est irréductible

Exemple 1.3. Soit G le groupe symétrique S_n . Il agit sur $V = \mathbb{C}^n$ par permutations de coordonnées Mais V n'est pas irréductible Il y a deux sous espace $W_1 = \{(x, x, \dots, x) \in \mathbb{C}^n\}$ et $W_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n | x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Les deux sous espace sont irréductible

Proposition 1.4. Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles

Preuve. Le produit hermitien G -invariant. $V = V_1 \oplus V_2$ □

On peut définir l'action de G sur $Hom(V, V')$ par $\phi \mapsto \pi'(g)\phi\pi(g^{-1})$. On écrit $Hom_G(V, V')$ l'espace de G -équivalent homomorphisme de V vers V' .

Lemme 1.5 (Lemme de Schur). Soient V, V' deux représentation. Alors $Hom_G(V, V')$ est de dimension 0 si $V \not\sim V'$; l'espace $Hom_G(V, V')$ est de dimension 1 si $V \simeq V'$.

Preuve. Image, noyaux sont encore G -invariant □

2 Orthogonalité

On peut définir une fonction sur les classe de conjugaison.

Définition 2.1. Soient V une représentation de G et g dans G . On défini le caractère

$$\chi_\pi(g) = \text{tr}(\pi(g), V).$$

Théorème 2.2 (Première orthogonalité). Soient V, V' deux représentations irréductibles, alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g) \overline{\chi_{\pi'}(g)} = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq V' \\ 0 & \text{si} \end{cases}$$

Preuve. Lemme de Schur sur $\text{Hom}(V, V')$. Grâce a $\text{Hom}(V, V') = V^* \otimes V'$, le caractère

$$\chi_{\text{Hom}(V, V')} = \chi_{V'} \overline{\chi_V}$$

□

Soit $\{(V_i, \pi_i)\}_{i \in I}$ union de représentation irréductible non isomorphe.

L'algèbre de groupe sur \mathbb{C} : $\mathbb{C}[G]$ a une base indexée par les éléments de G , espace vectoriel engendré par g dans G , les multiplications sont les compose par la loi de groupe. (La représentation régulière) L'application de G dans $GL(V_i)$ se plonge par linéarité en un homomorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ dans $\text{End}(V_i)$.

Théorème 2.3. Il y a un G équivalent isomorphisme de l'algèbre

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{End}(V_i) \tag{1}$$

Preuve. Utilise la première orthogonalité pour calculer la multiplicité de V_i dans $\mathbb{C}[G]$. On $\sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi_{V_i}(g)} = \chi(1) \overline{\chi_{V_i}(1)} = |G| \dim V_i$. Donc la dimension de $\mathbb{C}[G]$ égale $\sum_{i \in I} (\dim V_i)^2$. C'est suffit de montrer que l'application de $\mathbb{C}[G]$ dans $\bigoplus_{i \in I} \text{End}(V_i)$ est injectif.

Suppose $f = \sum_{g \in G} a_g e_g$ est dans le noyau. L'image de f dans chaque $\text{End}(V_i)$ est $\sum_{g \in G} a_g \pi_i(g) = 0$. Donc l'image de f dans $\text{End}(V)$ est 0 pour tout les représentation V de G . On l'applique à la représentation régulière, $\rho : \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}[G])$. On prend vecteur e_{Id} dans $\mathbb{C}[G]$

$$0 = \rho(f)e_{Id} = \sum_{g \in G} a_g \rho_g e_{Id} = \sum_{g \in G} a_g e_g$$

Donc $f = 0$. □

On écrit \mathcal{C} l'ensemble de classe de conjugaison et \mathcal{R} l'ensemble de représentation irréductible.

Corollaire 2.4. Le nombre de classe de conjugaison égale le nombre de représentation irréductible.

Preuve. La dimension de centre de $\mathbb{C}[G]$, $Z(\mathbb{C}[G])$. On défini $e_C = \sum_{g \in C} e_g$. Alors $Z(\mathbb{C}[G])$ engendré par $\{e_C\}_{C \in \mathcal{C}}$. □

Parce que χ_π est une fonction constante sur les classe de conjugaison. La première orthogonalité

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |C| \chi_\pi(C) \overline{\chi_{\pi'}(C)} = \begin{cases} |G| & \text{si } \pi \simeq \pi' \\ 0 & \end{cases}$$

Donc $\left(\left(\frac{|C|}{|G|} \right)^{1/2} \chi_\pi(C) \right)_{\pi \in \mathcal{R}, C \in \mathcal{C}}$ est un matrice unitaire. Les relations en colonne nous donnent

Théorème 2.5 (Deuxième orthogonalité). *Soit C, C' deux classe de conjugaisons, alors*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{R}} \chi_\pi(C) \overline{\chi_\pi(C')} = \begin{cases} |C|/|G| & \text{si } C = C' \\ 0 & \end{cases}$$

3 Exemple

Groupe cyclique, groupe symétrique de rang 2, 3 ou 4.

- t la représentation triviale
- ϵ_n la représentation signature (parité de permutation)
- St_n La représentation standard. Agir par permutation dans l'espace W_2 dans exemple. (Préserve le simplexe régulier dans un espace euclidien de dimension n)

4 La Formule de Frobenius

[Zag][LZ13]

Soient C_1, \dots, C_k les classe de conjugaison (peut etre coïncide). On défini

$$\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k) = \#\{(c_1, \dots, c_k) \in C_1 \times \dots \times C_k \text{ tel que } c_1 \cdots c_k = 1\}$$

Cette somme ne dépend pas de l'ordre de C_1, \dots, C_k .

Théorème 4.1. *Soient G un groupe fini et C_j les classes de conjugaison,*

$$\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k) = \frac{|C_1| \cdots |C_k|}{|G|} \sum \frac{\chi(C_1) \cdots \chi(C_k)}{\chi(1)^{k-2}} \quad (2)$$

somme sur tous les caractères de représentation irréductible de G .

Le cas simple $k = 1, 2$, c'est la deuxième orthogonalité avec $(C, 1)$ est (C_1, C_2^{-1}) . On peut mémoriser cette formula: Le numérateur est le nombre de tous les possibilités. Si le produit bien distribuée, alors le nombre qu'on cherche est le numérateur diviser par le nombre d'éléments de groupe. Mais ce n'est pas le cas, il faut perturbe par les caractères.

Preuve. Voir [Zag, Thm.A.1.9]

□

Quand $k = 3$ et G est le groupe symétrique S_{2m} , comme dans la partie de carte combinatoire dans le note de Vincent Delecroix, on prend (σ, α, ϕ) satisfait Définition 2 [Del]. Fixe la classe de conjugaison est de fixer le nombre de polygone, le nombre de cote de polygone, le nombre de sommet et le nombre d'arêtes adjacentes à un sommet. Le carte combinatoire est un revêtement ramifiée sur la sphère privée de trois point. La formula de Frobenius compte les nombre de carte combinatoire satisfait les conditions ci-dessus.

Généralement, elle compte les nombre de revêtements ramifiée: Une application de deux surfaces fermes, f de X dans Y , en dehors de point singulier, c'est une revêtement. Dans le voisinage de point singulier, c'est donnée par $z \mapsto z^k$, ou k dans \mathbb{N} et z dans une boule d'origine dans le plan complexe.

Soient Y est la sphère \mathbb{CP}^1 privée de k points $\{y_1, \dots, y_k\}$ et G le groupe symétrique S_n . On cherche le revêtement X (peut être non connecte) de degré n . On choisi un point de base y_0 dans Y , et on note F son preimage. Donc F est un ensemble de n points. Soit γ_i est une lacet autour de y_i . On demande l'action monodromie de γ_i sur F est dans le classe C_i , $i = 1, \dots, k$. Avec cette choix de γ_i on a une relation $\gamma_1 \cdots \gamma_k = 1$ dans le groupe fondamental de Y , donc on demande $c_1 \cdots c_k = 1$ dans le groupe de monodromie. Le nombre \mathcal{N} compte les revêtements satisfont les propriétés ci-dessus.

Fixe le classe de conjugaison dit que le nombre de pre-image (nombre de cycle) et le degré de ramifie dans un point sont fixes (longueur d'un cycle).

Si on veut calculer le nombre de revêtement ramifiée de surface de genre g avec k points élevé, on introduit suivant. On défini

$$\mathcal{N}_g(G; C_1, \dots, C_k) = \#\{(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_k) \in G^{2g} \times C_1 \times \dots \times C_k \text{ tel que } [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_k = 1\}$$

Théorème 4.2. *Soit g dans \mathbb{N}*

$$\mathcal{N}_g(G : C_1, \dots, C_k) = |G|^{2g-1} |C_1| \cdots |C_k| \sum \frac{\chi(C_1) \cdots \chi(C_k)}{\chi(1)^{k+2g-2}} \quad (3)$$

somme sur tous les caractères de représentation irréductible de G .

Preuve. Voir [Zag, Thm.A.1.10] □

Références

- [Del] Vincent Delecroix. Cartes combinatoires et géométries des surfaces.
- [LZ13] Sergei K Lando and Alexander K Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Ser71] Jean-Pierre Serre. Représentation linéaire des groupes finis. *Hermann, Paris*, 1971.
- [Zag] D Zagier. Applications of the representation theory of finite groups.